

Übungen zur Vorlesung Numerik I

(Blatt 11)

Sommersemester 2004

**Abgabe der Aufgaben 1 und 2 bis 06.07.04, 18.00 Uhr
im Postfach 84 Ebene 6,
Aufgabe 3 bis 06.07.04, und Aufgabe 4 bis 13.06.04, 18.00 Uhr
per E-Mail an "lasch@math.uni-bremen.de"**

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Betrachten Sie die 2π -periodische Fortsetzung der Dachfunktion $d(x)$, die auf dem Grundintervall $[-\pi, \pi]$ durch $d(x) = |x|$ definiert ist.

- a) Berechnen Sie ein trigonometrisches Interpolationspolynom

$$\Psi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{m-1} (a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx)) + \frac{a_m}{2} \cos(mx)$$

minimalen Grades m zu den Stützstellen $x_0 = \pi/2, x_1 = \pi, x_2 = 3\pi/2$ und $x_3 = 2\pi$ und den Stützwerten $d(x_i), i = 0, \dots, 3$.

- b) Skizzieren Sie $d(x)$ und $\Psi(x)$ für $x \in [-2\pi, 2\pi]$.
- c) Berechnen Sie das Maximum des absoluten Fehlers $|\Psi(x) - d(x)|$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2: (3 Punkte)

Sei f eine n -mal stetig differenzierbare Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$. Betrachten Sie eine Folge von paarweise verschiedenen Stützpunkten $x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)}, j = 0, 1, 2, \dots$ mit $x_i^{(j)} \rightarrow x_0$ für $j \rightarrow \infty$. Es bezeichne $P_n^{(j)}$ das Interpolationspolynom, welches f an den Stützstellen $x_0, x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)}$ interpoliert.

Untersuchen Sie den Grenzwert der Folge von Interpolationspolynomen $p_n^{(j)}$ für $j \rightarrow \infty$.

Hinweis: Für die "Dividiererten Differenzen" gilt:

$$[f_0, \dots, f_i] = \frac{1}{i!} f^{(i)}(\zeta_i^{(j)})$$

mit $\min\{x_0, x_1^{(j)}, \dots, x_i^{(j)}\} < \zeta_i^{(j)} < \max\{x_0, x_1^{(j)}, \dots, x_i^{(j)}\}$

Aufgabe 3:

(6 Programmierpunkte)

Implementieren Sie den in der Vorlesung vorgestellten Algorithmus zur schnellen Fouriertransformation. Berechnen Sie mit Hilfe einer komplexen Fouriertransformation die trigonometrischen Interpolationspolynome zu den folgenden reellen Datensätzen:

- (i) An der Kurbelwelle eines Einzylinder-Zweitakt-Motors wirkt eine Drehkraft f , die vom Gasdruck und von der Massenträgheit herrührt. An den Stellen $t_k = k \cdot \pi/8$, $k = 0, 1, \dots, 15$, wurden folgende Werte von f_k in $[N]$ experimentell bestimmt:

f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
-8250	-29430	-2286	5974	-8829	-25408	-22681	-28655
f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
-8564	96560	45862	22092	-9025	-23514	-15127	12880

- (ii) Das Intervall $[0, 2\pi]$ sei unterteilt in $t_k = k \cdot \pi/8$, $k = 0, 1, \dots, 15$. Betrachten Sie die Funktion

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [1, 3], \\ 1, & t \in [1, 3]. \end{cases}$$

Verwenden Sie die Stützstellen $(t_k, f(t_k))$, $k = 0, \dots, 15$.

Aufgabe 4:

(5 Programmierpunkte)

In der Fränkischen Schweiz werden die Überreste einer Versteinerung gefunden. Zur Rekonstruktion wird das 16 m lange und 5 m breite Fundgebiet mit einem Raster überzogen und jedes Fundstück in dieses Koordinatensystem eingezeichnet. In der folgenden Tabelle sind die Fundkoordinaten (x_i, y_i) aller Stücke verzeichnet, die den Umriß der Versteinerung angeben.

Gehen Sie zur Rekonstruktion folgendermaßen vor:

Die Gestalt des Fundstücks wird durch eine Kurve

$$t \mapsto \begin{pmatrix} \phi(t) \\ \tilde{\phi}(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

beschrieben, wobei $\phi(\cdot)$ und $\tilde{\phi}(\cdot)$ jeweils durch einen natürlichen kubischen Spline approximiert werden. Da das Durchlaufen der Kurve mit „konstanter Geschwindigkeit“ geschehen soll, läßt man die Bogenlänge der Kurve einfließen, indem man als Stützwerte die Stellen

$$t_0 := 0, \quad t_i := t_{i-1} + \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} \quad \text{für } i = 1, \dots, 22$$

benutzt.

Nr. des Fundstücks	x_i	y_i	Nr. des Fundstücks	x_i	y_i
0	0.25	4.65	12	9.50	0.25
1	0.75	4.83	13	8.75	1.25
2	3.50	3.50	14	6.00	1.25
3	3.75	3.25	15	5.50	1.50
4	4.50	3.40	16	4.50	1.50
5	6.00	4.00	17	4.00	0.25
6	9.00	3.00	18	3.50	1.50
7	10.50	2.00	19	2.50	4.00
8	15.00	0.50	20	1.00	4.77
9	13.00	0.75	21	0.75	4.70
10	10.50	1.40	22	0.25	4.65
11	10.00	1.30			

- (i) Schreiben Sie eine Prozedur zur Berechnung eines natürlichen kubischen Splines, der an n Stützstellen n reelle Funktionswerte interpoliert. Stellen Sie das zu dem natürlichen Spline gehörende lineare Gleichungssystem auf und lösen Sie das tridiagonale System effizient (vgl. Kap. 3.3.3).
- (ii) Berechnen Sie den Spline $S(\cdot)$ aus (i), der an den Stützstellen t_i , $i = 0, \dots, 22$, die Werte $x_i = \phi(t_i)$ interpoliert.
- (iii) Berechnen Sie den Spline $\tilde{S}(\cdot)$ aus (i), der an den Stützstellen t_i , $i = 0, \dots, 22$, die Werte $y_i = \tilde{\phi}(t_i)$ interpoliert.
- (iv) Unterteilen Sie das Intervall $[t_0, t_{22}]$ in 100 Teilintervalle, und werten Sie beide Splines auf jedem Teilintervall aus.
- (vi) Fertigen Sie eine grobe Skizze des approximierten Fundstücks

$$t \mapsto \begin{pmatrix} S(t) \\ \tilde{S}(t) \end{pmatrix}$$

an.